数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 23-31

フルタ型不等式間における順序について

前橋工科大学　亀井栄三郎
Maebashi Institute of Technology
Eizaburo Kamei

1. フルタ不等式から chaotic 順序へ

A, B をヒルベルト空間上の正作用素とする。A がヒルベルト空間 H 上の正作用素であるとは $(Ax,x)\geq 0\ \forall x\in H$ のときをいい $A\geq 0$ と表す。また A が狭義の正作用素であるとは $A\geq 0$ かつ可逆な場合をいい $A>0$ と表すことにする。ここでは A, $B\geq 0$ に対し A, B の *α-power mean* $\natural_\alpha$ と呼ばれる作用素平均 [20] を基本的な手法として扱う。それは次のように与えられる。

$$A \natural_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}, \quad for\ \alpha\in[0,1]$$

フルタ不等式 ([8],[9]) を作用素平均を用いて表すと次のようになる ([3],[13])。

Furuta inequality:

(F)
$$A\geq B \Longrightarrow A^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq A \quad and \quad B\leq B^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

for $p\geq 1$ and $u\leq 0$.

これを作用素平均を用いて証明を与えると次のように 1 行に繋ぐことができる ([13])。

Satellite theorem of the Furuta inequality: If $A\geq B\geq 0$, then

(SF)
$$A^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq B\leq A\leq B^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

for all $p\geq 1$ and $u\leq 0$.

この $A^u \natural_\alpha B^p$ を A^u と B^p とを繋ぐ *path* とみなす。
即ち $\alpha=0$ のとき $A^u \natural_0 B^p = A^u$, $\alpha=1$ のとき $A^u \natural_1 B^p = B^p$, $0<\alpha<1$ のときを A^u が B^p に変化してゆく途中経過とみなす。$\alpha=\frac{\delta-u}{p-u}$ とすることでフルタ不等式は $\delta=1$ における現象を表している、という解釈を与えることとができる。

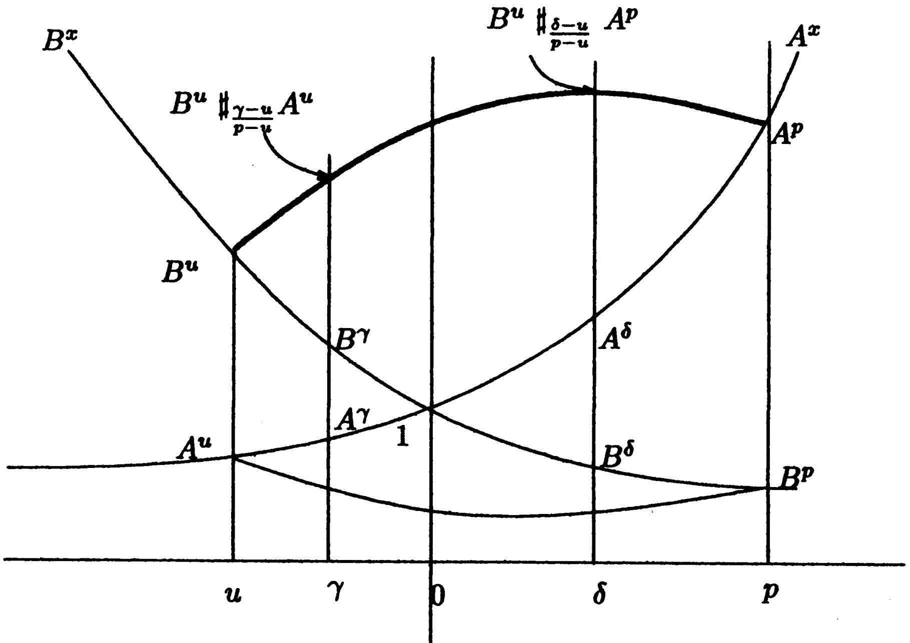

Figure 1

Satellite theorem of the Furuta inequality は Figure 1 で見られるとおり $\delta = 1$ において図に表れる大小関係がそのまま得られるということである。先の Satellite theorem をもう少し一般化すれば $A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p$ と $B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$ および A^δ, B^δ との関係は次のようになる([5],[6])。

$0 < \delta \leq \min\{1, p\}$ の場合

(1) $$A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \leq B^\delta \leq A^\delta \leq B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$$

$\max\{u, -1\} \leq \gamma < 0$ の場合

(2) $$A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \leq A^\gamma \leq B^\gamma \leq B^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p$$

次に $\delta \to 0$ とした場合、どのような関係が得られるかについて考えてみる。(1) において

$$\frac{A^\delta - I}{\delta} \geq \frac{B^\delta - I}{\delta}$$

は成立している。このことより次を得る。

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{A^\delta - I}{\delta} \geq \lim_{\delta \to 0} \frac{B^\delta - I}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \log A \geq \log B$$

そこで $\log A \geq \log B$ なる関係を $A \gg B$ と表し chaotic 順序と呼ぶ。この *chaotic* 順序を Figure 1 上で見られる関係として次の結果は自然なものであろう。これは安藤 ([1]) の exponential inequality に刺激され得られた結果である ([4]) が、これからの議論の出発点でもある、という意味を込めて chaotic Furuta 不等式と呼ぶこととする。

Chaotic Furuta inequality: *Let A and B be positive invertible operators. If $A \gg B$, then*

(CF) $$A^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} B^p \leq I \leq B^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} A^p$$

for any $p \geq 0$ *and* $0 \geq u$.

これはさらに次のように一般化できる ([14],[15],[18],[19])。

Theorem A. *Let A and B be positive invertible operators, then the followings are equivalent.*

(1) $$A \gg B \ (\text{i.e.} \log A \geq \log B)$$

(2) $$A^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p \leq B^\delta \quad \text{for} \quad u \leq 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq \delta \leq p$$

(3) $$B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p \geq A^\delta \quad \text{for} \quad u \leq 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq \delta \leq p$$

(4) $$A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p \leq A^\gamma \quad \text{for} \quad u \leq \gamma \leq 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq p$$

(5) $$B^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} A^p \geq B^\gamma \quad \text{for} \quad u \leq \gamma \leq 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq p.$$

簡単のため証明を与えておく。

Proof of Theorem A. Since $A^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} B^p \leq 1$ by (CF), (1) implies (4) is given as follows:

$$A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{p-u}} B^p = A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{-u}} (A^u \natural_{\frac{-u}{p-u}} B^p) \leq A^u \natural_{\frac{\gamma-u}{-u}} 1 = A^\gamma.$$

The equivalence of (2), (3), (4) and (5) are also shown similarly and the converse is the case of $\delta = 0$.

特に $\delta = 1$ とすればフルタ不等式 (F) の形が得られる。(SF) と比較することで $A \geq B$ と $A \gg B$ の相異を明らかにしているのが次の定理である ([18],[19])。

Satellite theorem of chaotic Furuta inequality: *Let A and B be positive invertible operators. If* $A \gg B$, *then*

(SCF) $$A^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} B^p \leq B \quad \text{and} \quad A \leq B^u \natural_{\frac{1-u}{p-u}} A^p$$

holds for any $p \geq 1$ *and* $0 \geq u$.

$A \gg B$ は $A \geq B$ より弱い順序であることより $A \geq B$ の仮定が加われば (SCF) より (F) または (SF) は直ちに得られる。

2. chaotic 順序とグランドフルタ型不等式

まずグランドフルタ不等式について述べよう ([2],[10],[11])。これも作用素平均を用いて表すと次のようになる ([4],[7])。ただしここで $\natural_s$ は α-power mean を一般化したもので

$$A \natural_s B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^s A^{\frac{1}{2}} \quad s \in \mathbf{R}$$

で与えられる。$0 \le s \le 1$ のときは $\natural_s = \sharp_s$ である。

Grand Furuta inequality: *If $A \ge B \ge 0$ and A is invertible, then for each $1 \le p$ and $0 \le t \le 1$,*

$$\text{(GF)} \qquad A^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \le A \quad \text{and} \quad B \le B^{-r+t} \sharp_{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} (B^t \natural_s A^p)$$

holds for $t \le r$ and $1 \le s$.

このグランドフルタ不等式についてもフルタ不等式の場合と同様 Satellite 型が得られ次のように与えられる ([16])。

Satellite theorem of the grand Furuta inequality. *If $A \ge B > 0$, then for $0 \le t \le 1$, $0 \le t < p \le \beta$, $u \le 0$, $0 \le \delta \le 1$ and $\delta \le \beta$, the following holds.*

$$\text{(SGF)} \qquad A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \le (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \le B^\delta$$

$$\le A^\delta \le (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{\delta}{\beta}} \le B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)$$

ここで $s = \frac{\beta-t}{p-t}$, $u = -r+t$ と置くことで (GF) の形に変換することができる。我々は下図 (Figure 2) に見るように (SGF) もまた B^u と $B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p$ を繋ぐ path に於ける現象とみなす。δ の条件をもう少し弱めることで次のような形を与える事をができる ([17])。

Theorem B. *If $A \ge B > 0$, then for each $t \in [0,\ 1]$, $0 \le t < p \le \beta$, $u \le 0$ and $0 \le \delta \le \beta$, the following hold.*

$$A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \le (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$$

$$B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \ge (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p)^{\frac{\delta}{\beta}}$$

さらに δ の自由度を広げることで、フルタ型不等式とグランドフルタ型との間において次のような順序がつくことがわかる。これらの関係も下図 (Figure 2) のように表すことができる ([17], cf.[12],[13])。

Theorem 1. *If $A \ge B > 0$ and $0 \le t \le 1$, $0 \le t < p \le \beta$, $u \le 0$, then*

$$A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \le A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p$$

and

$$B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \ge B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$$

holds for $u \le \delta \le p$.

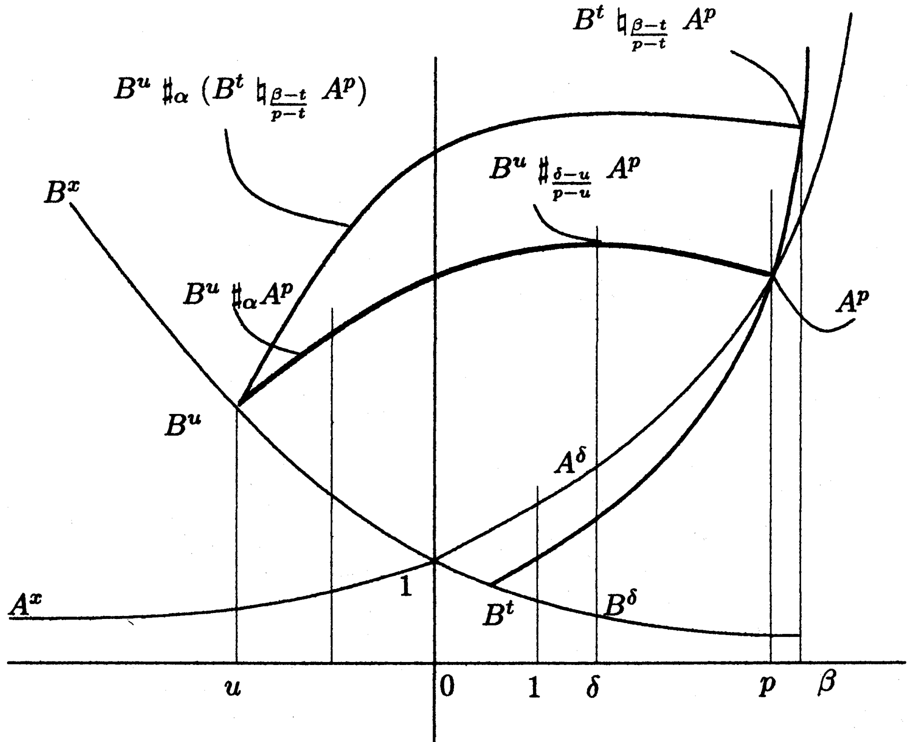

Figure 2

ではグランドフルタ型不等式において chaotic 順序を用いるとどのようなものになるか、また $t \in [0, 1]$ を緩めることはできないか、などといったことが気になってくる。これを負の値に取って同様の議論を展開出来ないものかと気になっていた。ところが Theorem A を使うことで $A \gg B$ のとき次が成り立つ。

Theorem 2. *If* $A \gg B$*, then for* $u \le t \le 0 \le p \le \beta$*,* $u \le \delta \le p$ *and* $p \le \beta \le 2p$*, the following hold.*

$$A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \le A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p$$

$$B^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \ge B^u \natural_{\frac{\delta-u}{p-u}} A^p$$

Lemma. *If* $A \gg B$ *and* $0 \le p \le \beta \le 2p$*, then for* $u \le t \le 0$*,*

$$A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p \le A^u \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} B^p$$

and

$$B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p \ge B^u \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} A^p.$$

Proof. Since $1 \le \frac{\beta-t}{p-t} \le 2$ and by using Theorem 1, we have the following:

$$\begin{aligned} A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p &= B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t})B^p \\ &\le B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} (A^u \sharp_{\frac{t-u}{p-u}} B^{-u})B^p \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} (B^{-p} \sharp_{\frac{p-t}{p-u}} A^{-u})B^p \\
&= B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-u}} A^{-u})B^p = A^u \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} B^p.
\end{aligned}
$$

Proof of Theorem 2. By the above lemma, we have

$$
\begin{aligned}
& A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \\
\leq\ & A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-u}{p-u}} B^p) = A^u \sharp_{\frac{\delta-u}{p-u}} B^p
\end{aligned}
$$

この関係も次の Figure 3 によって説明できる。

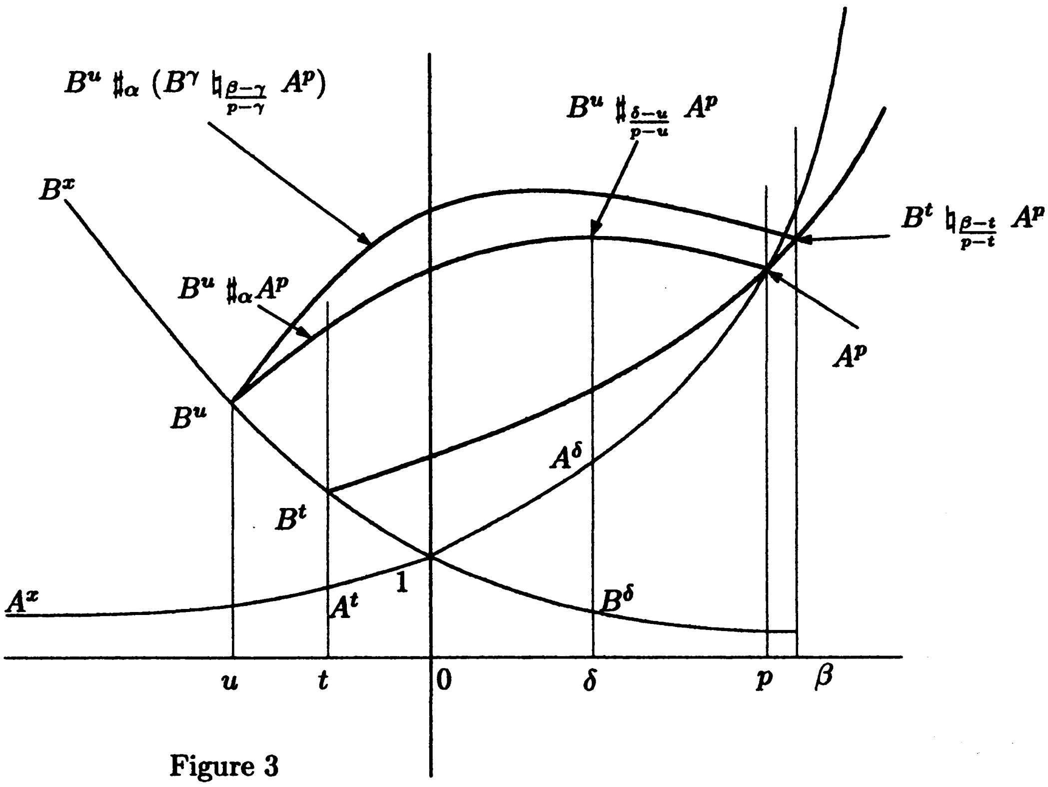

Figure 3

Theorem 2 において $p \leq \beta \leq 2p$ という制限がついてしまうことに不満を感じていた。ところが次のようにすることで β は自由となり次の関係を得る。

Theorem 2. *For $A,\ B > 0$, if $A \gg B$ and $u \leq t \leq 0 \leq p \leq \beta$, then*

(1)
$$A^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^t \natural_{\frac{\alpha-t}{p-t}} B^p$$

(2)
$$B^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq B^t \natural_{\frac{\alpha-t}{p-t}} A^p$$

holds for $t \leq \alpha \leq \beta$.

Proof. By (FC), we have $(A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{-t}{p-t}} \leq A^{-t}$.
So $A \gg (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{p-t}}$ holds and

$$A^{u-t} \sharp_{\frac{\alpha-t-(u-t)}{\beta-t-(u-t)}} (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\beta-t}{p-t}} \leq (A^{-\frac{t}{2}} B^p A^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\alpha-t}{p-t}}.$$

$$A^u \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}}) \leq A^t \natural_{\frac{\alpha-t}{p-t}} B^p.$$

下図 (Figure 4) は Theorem 2 の (2) の関係を示したものとなっている。

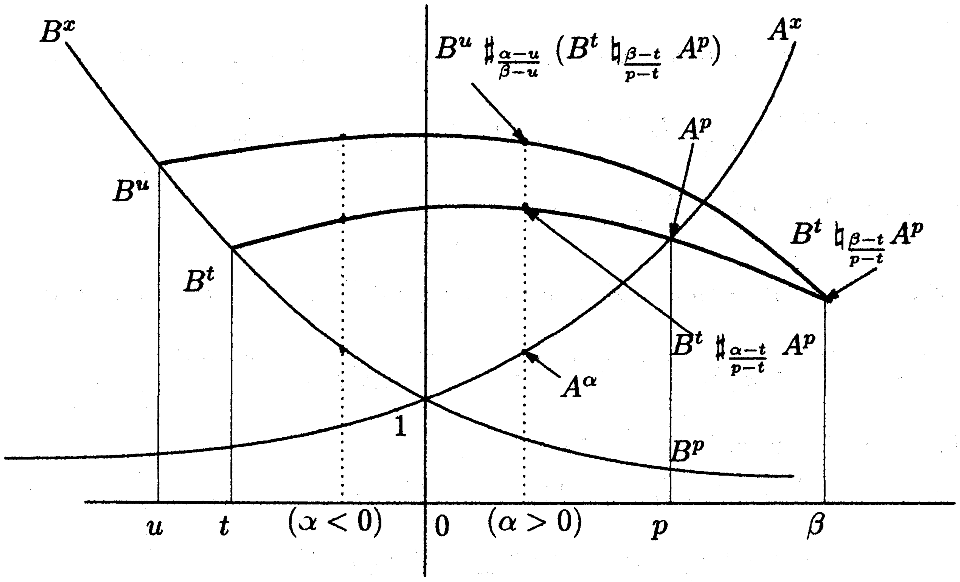

Figure 4

この図からもわかるように Theorem 2 は更に詳しく述べると次のようにできる。

Corollary 4. *Let A, $B > 0$ and $A \gg B$. Then the following (1) and (2) holds.*
(1) the case $t \leq \alpha \leq 0$,

$$A^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^t \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} B^p \leq A^\alpha$$

$$B^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq B^t \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} A^p \geq B^\alpha$$

(2) the case $0 \leq \alpha \leq p$,

$$A^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^t \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} B^p \leq B^\alpha$$

$$B^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (B^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} A^p) \geq B^t \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} A^p \geq A^\alpha$$

Proof. (1) is obtained as follows: By (CF), we have $(A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^{\frac{-t}{p-t}} \leq A^{-t}$. Since $A_1 = A^{\alpha-t} \gg (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\alpha-t}{p-t}} = B_1$, $A_1^{t_1} \sharp_{\frac{1-t_1}{p_1-t_1}} B_1^{p_1} \leq B_1$ holds for $t_1 \leq 0$ and $1 \leq p_1$ by (SCF). Let $t_1 = \frac{u-t}{\alpha-t_1}$ and $p_1 = \frac{\beta-t}{\alpha-t}$, then

$$A^{u-t} \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\beta-t}{p-t}} \leq (A^{-\frac{t}{2}}B^pA^{-\frac{t}{2}})^{\frac{\alpha-t}{p-t}}.$$

Namely,

$$A^u \sharp_{\frac{\alpha-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \leq A^t \sharp_{\frac{\alpha-t}{p-t}} B^p \leq B^\alpha.$$

The final inequality is obtained by Theorem 2.

最近古田は chaotic 順序に関して作用素平均を用いて表すと次のようになる結果を示している ([11])。

Theorem F1. *For positive invertible operators A and B, $A \gg B$ if and only if*

(F1) $$I \geq A^{-r+t} \sharp_{\frac{r-t}{(p-t)s+r}} B^{(p-t)s+t} \geq A^{-r+t} \sharp_{\frac{r-t}{(p-t)s+r}} (A^t \sharp_s B^p)$$

holds for $t \leq 0$, $t \leq r$, $0 \leq p$ *and* $\frac{-t}{p-t} \leq s \leq 1$.

Theorem F2. *For positive invertible operators A and B, $A \gg B$ if and only if*

(F2) $$1 \geq A^{-r+t} \sharp_{\frac{r-t}{(p-t)s+r}} (A^t \natural_s B^p) \geq A^{-r+t} \sharp_{\frac{r-t}{(p-t)s+r}} B^{(p-t)s+t}$$

holds for $t \leq 0$, $t \leq r$, $0 \leq p$ *and* $1 \leq s \leq \frac{2p-t}{p-t}$.
(F1) については $u = -r+t$, $s = \frac{\delta-t}{p-t}$, $t \leq 0 \leq \delta \leq p$ とすれば

(F1′) $$I \geq A^u \sharp_{\frac{-u}{\delta-u}} B^\delta \geq A^u \sharp_{\frac{-u}{\delta-u}} (A^t \sharp_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p)$$

と表せる。最初の不等号は (CF) であり、2番目は Theorem A より $A^t \sharp_{\frac{\delta-t}{p-t}} B^p \leq B^\delta$ であるから明らかとなる。
また (F2) についても $u = -r+t$, $s = \frac{\beta-t}{p-t}, t \leq 0 \leq p \leq \beta \leq 2p$ とすれば

(F2′) $$I \geq A^u \sharp_{\frac{-u}{\beta-u}} (A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p) \geq A^u \sharp_{\frac{-u}{\beta-u}} B^\beta$$

と表せる。最初の不等号は Theorem 1 の $\beta = 0$ の場合であり更に (CF) を使うことで得られる。2番目の不等号については次の Lemma より明らかである。

Lemma. *Let $t \leq \alpha \leq 0 \leq p \leq \beta$ and $0 \leq \frac{\beta-p}{p-\alpha} \leq 1$. Then for $A \gg B$, the following holds.*

$$A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p \geq B^\beta.$$

Proof.

$$\begin{aligned} A^t \natural_{\frac{\beta-t}{p-t}} B^p &= B^p \natural_{\frac{p-\beta}{p-t}} A^t = B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-t}} A^{-t})B^p \\ &= B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-\alpha}} (B^{-p} \sharp_{\frac{p-\alpha}{p-t}} A^{-t}))B^p \geq B^p(B^{-p} \sharp_{\frac{\beta-p}{p-\alpha}} B^{-\alpha})B^p = B^\beta. \end{aligned}$$

References

[1] T.Ando, On some operator inequalities, Math. Ann., 279(1987), 157-159.
[2] T.Ando and F.Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, Linear Alg. and Its Appl.,197(1994),113-131.
[3] M.Fujii, Furuta's inequality and its mean theoretic approach, J.Operator Theory, 23(1990),67-

[4] M.Fujii, T.Furuta and E.Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Alg. and Its Appl., 179(1993), 161-169.

[5] M.Fujii, J.F.Jiang and E.Kamei, A characterization of orders defined by $A^\delta \geq B^\delta$ via Furuta inequality, 45(1997), 519-525.

[6] M.Fujii, J.F.Jiang, E.Kamei and K.Tanahashi, A characterization of chaotic order and a problem, J. of Inequal. Appl., 2(1998), 149-156.

[7] M.Fujii and E.Kamei, Mean theoretic approach to the grand Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996),2751-2756.

[8] T.Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc.,101(1987),85-88.

[9] T.Furuta, Elementary proof of an order preserving inequality, Proc. Japan Acad., 65(1989),126.

[10] T.Furuta, Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization, Linear Alg. and Its Appl.,219(1995),139-155.

[11] T.Furuta, $A \geq B > 0$ ensures $A^{1+r-t} \geq \{A^{\frac{r}{2}}(A^{\frac{-t}{2}} B^p A^{\frac{-t}{2}})A^{\frac{r}{2}}\}^{\frac{1+r-t}{(p-t)s+r}}$ for $t \in [0,1], r \geq t, p \geq 1, s \geq 1$ and related inequalities, preprint.

[12] T.Furuta and D.Wang, A decreasing operator function associated with the Furuta inequality, Proc. Amer. Math. Soc., 126(1998), 2427-2432.

[13] T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida, Operator functions implying generalized Furuta inequality, Math. Inequal. Appl.,1(1998),123-130.

[14] E.Kamei, A satellite to Furuta's inequality, Math. Japon.,33(1988),883-886.

[15] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, Math. Japon., 49(1999), 65-71.

[16] E.Kamei, Parametrization of the Furuta inequality, II, Math. Japon., 50(1999), 179-182.

[17] E.Kamei, Parametrized grand Furuta inequality, Math. Japon., 50(1999), 79-83.

[18] E.Kamei, Order among Furuta type inequalities, Math. Japon.,51(2000), 403-409.

[19] E.Kamei, Chaotic order and Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 221-225.

[20] E.Kamei and M.Nakamura, Remark on chaotic Furuta inequality, Sci. Math. Japon., 53(2001), 535-539.

[21] F.Kubo and T.Ando, Means of positive linear operators, Math. Ann.,246(1980), 205-224.